Module Analyse Numérique
Rattrapage - Durée 2h

Exercice 1 *On considère les matrices A et B définies par:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer les matrices d'itérations de Jacobi J_A et J_B associées à A et à B.*
2. *Déterminer les rayons spectraux $\rho(J_A)$ et $\rho(J_B)$.*
3. *Calculer les matrices d'itérations de Gauss-Seidel GS_A et GS_B associées à A et à B.*
4. *Déterminer les rayons spectraux $\rho(GS_A)$ et $\rho(GS_B)$.*
5. *Soient les problèmes*

$$(\mathcal{P}_1) : \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } x \in \mathcal{R}^3 \\ \text{tel que} \quad Ax = b \text{ avec } b \in \mathcal{R}^3 \end{array} \right\}$$

$$(\mathcal{P}_2) : \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } x \in \mathcal{R}^3 \\ \text{tel que} \quad Bx = b \text{ avec } b \in \mathcal{R}^3 \end{array} \right\}$$

6. *quelle(es) méthodes utiliser pour résoudre* $(\mathcal{P}_1)$?
7. *quelle(es) méthodes utiliser pour résoudre* $(\mathcal{P}_2)$?

Exercice 2 *Soit $m > 1$ un entier et F une fonction de classe C^{m+1} sur un intervalle $[a, b]$ On suppose qu'il existe $x^* \in [a, b]$ racine de F d'ordre m.*

1. *Montrer que la méthode de Newton pour approcher x^* est d'ordre 1.*
2. *Montrer que la méthode définie par:*

$$x_{n+1} = x_n - m.\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

converge vers x^* et que la convergence est au moins d'ordre 2.

Exercice 3 *Déterminer le polynôme passant par les points:*

$$(-1, 1); \quad (0, 1); \quad (1, 0);$$

par :

(i) Lagrange

(ii) Newton